Dossier de candidature à un poste de Maître de conférences

Mathématiques (section 25)

Jérôme TAMBOUR

Mots-clés : Variétés complexes, topologie algébrique, combinatoire (complexes et posets simpliciaux), géométrie torique (variétés toriques, complexes moment-angle, "torus manifolds").

TABLE DES MATIÈRES

1 Curriculum vitæ

PERSONNEL

Né le 19 mai 1984 (26 ans) à Auxerre (Yonne, France).
Nationalité française.
Célibataire, sans enfant.

POSITION ACTUELLE et COORDONNÉES

Jérôme Tambour
Chercheur post-doctoral au KAIST (Corée du Sud).

Adresse professionnelle :
KAIST (Korean Advanced Institute of Science and Technology)
Department of mathematical Sciences (E6-1)
291 Daehak-ro Yuseong-gu
Daejeon 305-701
South Korea

Adresse personnelle :
16, rue du chateau
89000 VILLENEUVE SAINT SALVES
FRANCE

Tél : (+82)010 − 8334 − 2055
Mail : jerome.tambour@gmail.com
Page web : http://mathsci.kaist.ac.kr/~tambour

FORMATIONS et CURSUS

2011-2012	**Chercheur post-doctoral et Enseignant assistant au KAIST (Daejeon, Corée du Sud).** *Bourse nationale coréenne $BK21$.* Encadrant : Dr. Dan Zaffran.
13/12/2010	**Titre de docteur en mathématiques de l'Université de Bourgogne (mention Très honorable).** *Titre de la thèse : Complexes moment-angle et variétés complexes.* Mots-clés : Géométrie complexe, Topologie algébrique, variétés toriques, sphères simpliciales. Rapporteurs : Pr. Michel Brion et Pr. Santiago Lopez de Medrano. Jury : Frédéric Bosio, Michel Brion, Adrien Dubouloz, Laurent Meersseman, Robert Moussu, Taras Panov, Santiago Lopez de Medrano.
2008-2011	**Allocataire de recherche - Moniteur à l'Institut de Mathématiques de Bourgogne.** Directeur de Thèse : Pr. Laurent Meersseman.
2008	**Agrégation externe de Mathématiques.** *Classement :* $82^{\text{ème}}$.
2007-2008	**Deuxième année de Master de Mathématiques approfondies à l'Université de Bourgogne.** *Mention Très Bien.* Mémoire : Sur un théorème d'uniformisation d'Alberto Verjovsky pour les feuilletages hyperboliques (sous la direction de Laurent Meersseman).
2006-2007	**Première année de Master de Mathématiques approfondies à l'Université de Bourgogne.** *Mention Très Bien.* Mémoire : Nombres ordinaux et cardinaux - Applications à la topologie radiale (sous la direction de Szymon Dolecki).
2003-2006	**Licence de Mathématiques à l'Université de Bourgogne.** *Mention : Félicitations du jury.*
2002	**Baccalauréat scientifique spécialité mathématiques.** *Mention Bien.*

INFORMATIQUE et LANGUES

* Bon niveau d'utilisation des logiciels Maple, LaTeX, HTML et CSS.
* Connaissance de la programmation en Java (Programmation Orientée Objet et Interfaces Homme-Machine) et connaissances basiques en JavaScript.
* Français (langue maternelle).
* Anglais et Espagnol (bon) ; coréen (débutant).

DIVERS

* Hobbies : cinéma, musique, jeux de société, voyages.
* Sports : football, torball (un sport pour déficients visuels).
* Président de l'association humanitaire Lato Sensu (projets de solidarité internationale au Sénégal).

2 Publications

THÈSE :

[1] *Complexes moment-angle et variété complexes* (en français).
Disponible sur http ://tel.archives-ouvertes.fr.

Mots-clés : Géométrie complexe, géométrie torique, topologie algébrique, variétés toriques, sphères simpliciales.

Rapporteurs : Pr. Michel Brion et Pr. Santiago Lopez de Medrano.
Jury : Frédéric Bosio, Michel Brion, Adrien Dubouloz, Laurent Meersseman, Robert Moussu, Taras Panov, Santiago Lopez de Medrano.

Résumé : Le but de cette thèse est d'étudier la topologie d'une grande famille de variétés complexes non kählériennes appelées variétés LVMB. La stratégie développée pour cette étude est d'examiner les relations entre ces variétés complexes et les complexes moment-angle et les variétés algébriques toriques.

ARTICLES ACCEPTÉS

[2] *LVMB manifolds and simplicial spheres*, à paraître dans les Annales de l'Institut Fourier.
(version initiale http ://arxiv.org/abs/1006.1797)

PREPRINTS (à soumettre)

[3] *Linear Gale transform of a starshaped sphere* 21 pages en anglais.
(version initiale http ://arxiv.org/abs/1201.6205)

ARTICLES EN PRÉPARATION

[4] *Connected sum of simplicial posets and application to the topology of torus manifolds*
Travail en collaboration avec Tomoo Matsumura (KAIST) and Cheong Baek Seong (KAIST)

DIVERS

[5] *Ensembles de nombres.*
(Oeuvre collective présentant les ensembles ayant droit à l'appellation "ensemble de nombres" : entiers, rationnels, réels, complexes, quaternions, ordinaux, cardinaux,. . .)

Les preprints de mes publications sont également disponibles sur ma page web :

`http://mathsci.kaist.ac.kr/~tambour`.

De plus, en cas de convocation aux auditions, les publications [1], [2] et [3] seront adressées à l'établissement.

3 Activités pédagogiques

ENSEIGNEMENTS depuis l'obtention du DOCTORAT

2011-2012	**CM d'Introduction à l'Algèbre Linéaire.** 48h. *Rédaction du cours. Elaboration des énoncés d'examen. Coordination des chargés de TD.*
2011-2012	**TD d'Analyse.** Fréquence : 24h. *Elaboration des planches de TD.* *Calcul différentiel - Séries entières et séries de Fourier - Intégrales multiples*

Les différents enseignements en tant que moniteur ont tous eu lieu à l'UFR Sciences et Techniques Mirande de l'Université de Bourgogne. Le monitorat a été accompagné par différents stages de formations encadrés par le CIES (Centre d'Initiation à l'Enseignement Supérieur) de Lyon (24 journées de stage en 3 ans).

ENSEIGNEMENTS en tant que MONITEUR

2009 - 2011 :	**TP d'Informatique Scientique.** 2$^{\text{ème}}$année Licence Sciences et Techniques parcours Mathématiques. Fréquence : 16h/an (2h/semaine). *Travaux pratiques destinés à acquérir la maîtrise du logiciel de calcul formel Maple. Elaboration d'un projet de fin d'année et encadrement des étudiants pour ce projet.*
2009 - 2011 :	**Séances de soutien et de remise à niveau.** 1ère année de licence de Sciences et Techniques parcours Mathématiques. Total : 20h/an. *Elaboration d'exercices et soutien personnalisé (sous forme de TD supplémentaires) aux étudiants de 1$^{\text{ère}}$année.*
2009 - 2011 :	**TD d'Analyse.** 2$^{\text{ème}}$année de Licence Sciences et Techniques parcours Physique - Chimie. Total : 32h/an (2h/semaine). *Fonctions et suites équivalentes - Développements limités - Suites numériques - Séries numériques - Séries entières et applications à la résolution d'équations différentielles - Equations différentielles usuelles.*
2008 - 2009 :	**TD d'Outils mathématiques et de Raisonnement en mathématiques.** 1$^{\text{ère}}$année de licence Sciences et Techniques parcours Mathématiques. Total : 32h (4h/semaine). *Logique élémentaire - Récurrence - Trigonométrie - Opération sur les ensembles - Applications (injectivité, surjectivité, bijectivité, image et image réciproque d'ensembles) - Ensembles usuels (entiers, rationnels, réels, complexes) - Suites - Arithmétiques - Fonction d'une variable (continuité, dérivabilité, développements limités) - Introduction aux structures algébriques.*
2008 - 2009 :	**TD d'Outils mathématiques.** 1$^{\text{ère}}$année de licence Sciences et Techniques parcours Informatique. Total : 32h (4h/semaine). *Trigonométrie et nombres complexes - Fonctions "usuelles" (fonctions trigonométriques et leurs réciproques) - Etude de fonctions d'une variable (continuité, dérivabilité, développements limités) - Courbes paramétrées.*

ENSEIGNEMENTS hors université

2010 - 2011 :	**Interrogations orales de mathématiques en classes préparatoires.** 1$^{\text{ère}}$année de HKBL et de PCSI au lycée Carnot (Dijon).Fréquence : 2h/semaine.
2009 - 2010 :	**Interrogations orales de mathématiques en classes préparatoires.** 1$^{\text{ère}}$année de MPSI et de PCSI au lycée Carnot (Dijon). Fréquence : 2h/semaine.
2004 - 2008 :	**Cours de soutien en mathématiques.** Tout niveau (Seconde générale à 2$^{\text{ème}}$année de classe préparatoire économique).

4 Responsabilités collectives

RESPONSABILITÉS

février 2010 - février 2012 :	Représentant élu des doctorants et post-doctorants au Conseil de Laboratoire de l'Institut de Mathématiques de Bourgogne.
2009-2011 :	Participation à l'organisation du Séminaire Etudiant de l'Institut de Mathématiques de Bourgogne.

AUTRES

2008 - 2011 :	Membre actif de l'association DMD (Doctorants en Mathématiques de Dijon).
Depuis 2011 :	Relecteur occasionnel pour le site *Images des maths.*

5 Activités de recherche

INTÉRÊTS

Centres d'intérêts : Géométrie, topologie, combinatoire.

Thèmes de recherche : Variétés complexes non kählériennes, triangulations de sphères, , posets simpliciaux, structure complexe d'espaces topologiques (complexes moment-angle,...), géométrie torique (variétés toriques et torus manifolds).

COMMUNICATIONS (passées et prévues)

janvier 2012 :	**Mini-cours sur les variétés non kählériennes et la géométrie torique.** à Osaka City University (Japon). *4 cours de 3 heures*
30/11/2011	**Rencontre "Toric geometry 2011"** à Osaka City University (Japon).
19/10 et 26/10/2011 :	**Séminaire Topology and Geometry** at KAIST (South Korea).
20/07/2011 :	**Conférence "Toric Methods in Homotopy Theory and Related Subjects"** à Queen's University in Belfast (Belfast, Royaume-Uni).
28/06/2011 :	**Séminaire Algebra und Zahlentheorie** à l'Université de Cologne (Allemagne). *Invitant* : Stéphanie Cupit-Foutou.
31/05/2011 :	**Séminaire Equations différentielles** à l'Institut de Mathématiques de Toulouse (France). *Invitant* : Jean-Pierre Mohsen.
06/05/2011 :	**Journées des écoles doctorales** de Dijon et Besançon (France). Titre : Géométrie des complexes moment-angle.
15/04/2011 :	**Séminaire Equations différentielles** à l'Institut de Mathématiques de Toulouse (France). *Invitant* : Martine Klughertz.
07/03/2011 :	**Séminaire Algèbre et Géométrie** à l'Institut Fourier (Grenoble, France). *Invitant* : Mikhail Zaidenberg.
03/03/2011 :	**Séminaire Groupes, Algèbre et Géométrie** au Laboratoire de Mathématiques de Poitiers (France). *Invitant* : Frédéric Bosio.
25/02/2011 :	**Séminaire Algebra and Geometry** à l'Université de Basel (Suisse). *Invitant* : Pierre-Marie Poloni.
23/02/2011 :	**Séminaire Systèmes dynamiques et Géométrie** au LAREMA (Laboratoire Angevin de Recherche en Mathématiques) d'Angers (France). *Invitant* : Jean-Jacques Loeb.
28/01/2011 :	**Séminaire Géométrie algébrique et Géométrie différentielle** au Laboratoire de Mathématiques de Brest (France). *Invitant* : Guillaume Deschamps.
07/12/2010 :	**Séminaire Etudiant** à l'Institut de Mathématiques de Bourgogne (France). Titre : Actions de groupes et construction de variétés complexes.
07/05/2010 :	**Journées des écoles doctorales** de Dijon et Besançon (France). Titre : Variétés complexes non projectives.
11/03/2010 :	**Séminaire AGT (Algèbre-Géometrie-Topologie)** à l'Institut de Mathématiques de Bourgogne. Titre : Sphères simpliciales et variétés complexes.
08/11/2009 :	**Séminaire Etudiant** à l'Institut de Mathématiques de Bourgogne (France). Titre : Sphères simpliciales et variétés complexes.

PARTICIPATION à des CONFÉRENCES, COLLOQUES, ÉCOLES

Du 01/12 au 05/12/2011	10^{th} **RIMS conference.** Osaka City University (Japan).
Du 28/11 au 30/11/2011	**Rencontre "Toric topology 2011".** Osaka City University (Japan).
Du 18/07 au 20/07/2011	**Conférence "Toric Methods in Homotopy Theory and Related Subjects".** Queen's University (Belfast, Royaume-Uni).
Du 16/02/2011 au 18/02/2011	**Mini-conférences dans le cadre de l'ANR "Complexes".** Institut de Mathématiques de Bourgogne. *4 mini-cours de 4 heures. Page de la mini-conférence* : ici
septembre 2009	**Ecole d'été "Uniformisation de familles de variétés complexes".** Institut de Mathématiques de Bourgogne. *6 mini-cours de 4 heures pendant 2 semaines. Page de l'école d'été :* ici
Avril 2009	**Journée de lancement de l'ANR Complexe.** Institut de Mathématiques de Bourgogne.

SÉJOUR à l'ÉTRANGER

janvier 2012	Séjour d'un mois à **Osaka City University à Osaka (Japon)** Invitation du Professeur Mikiya Masuda.
avril - mai 2009	Séjour de 2 mois à **l'Institut de Mathématiques de Cuernavaca (Mexique)** Mission ECOS.
janvier 2009	Séjour de 3 semaines au **PIMS (Pacific Institute for Mathematical Sciences) de Vancouver (Canada)** Invitation de Laurent Meersseman.

6 Résumé des travaux

Mes travaux portent principalement sur la topologie d'une large famille de variétés complexes compactes non kählériennes, appelées variétés LVMB. Rappelons-en brièvement la genèse et la construction. Les intersections de quadriques de la forme

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j |z_j|^2 = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = 1$$

où $\lambda_j \in \mathbb{R}^k$ ont été étudiées à partir des années 80, notamment par Camacho, Kuiper et Palis du point de vue des systèmes dynamiques complexes. Dans le cas $k = 2$, la classification complète de la topologie de ces intersections appelées *links*, a été effectuée par Lopez de Medrano [LdM]. Plus tard, Lopez de Medrano, Verjovsky (cas $k = 2$) et Meersseman (cas général, cf. [M]) montrèrent que les projectivisations des links admettaient une structure de variété complexe compacte et que ces variétés, appelées variétés LVM, sont soit des tores soit des variétés non kählériennes. Ils démontrèrent également que les exemples classiques de variétés complexes non kählériennes, à savoir les variétés de Hopf et les variétés de Calabi-Eckmann, peuvent être vu comme des cas particuliers de variétés LVM. Les variétés LVMB sont une généralisation de nature combinatoire des variétés LVM. C'est cette généralisation, due à Bosio [B], que nous allons présenter.

Etant donnés des vecteurs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de l'espace $\mathbb{C}^m$, on définit une action holomorphe du groupe de Lie complexe $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ sur l'espace $\mathbb{C}^n$ par

$$(*) \qquad (\alpha, T) \cdot z = (\alpha e^{<\lambda_1, T>} z_1, \dots, \alpha e^{<\lambda_n, T>} z_n)$$

(où $<,>$ désigne le produit scalaire *non hermitien* usuel de $\mathbb{C}^m$, i.e. $< z, w >= \sum_{j=1}^{n} z_j w_j$).

Cette action n'est pas libre (0 en est un point fixe). Cependant, en se donnant des hypothèses supplémentaires sur le choix des vecteurs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et en restreignant l'action à un certain ouvert $\mathcal{S}$ dense dans $\mathbb{C}^n$, l'action est libre et propre et l'espace des orbites $\mathcal{N}$ est compact et peut être muni d'une structure de variété complexe. Une telle variété est appelée variété LVMB. De plus, comme pour les variétés LVM, on a pour les variétés LVMB l'alternative suivante : ou bien elles sont non kählériennes, ou bien ce sont des tores compactes. Dans le même article [B], Bosio prouve notamment que si $m = 1$, les variétés obtenues sont des déformations analytiques des variétés LVM. Deux questions très naturelles n'avaient cependant pas de réponse dans cet article.

Question 1 **:** Existe-t-il une variété LVMB ayant une structure complexe distincte de celles des variétés LVM ?

Question 2 **:** Existe-t-il une variété LVMB ayant un type topologique distinct de ceux des variétés LVM ?

Dans [CFZ], Cupit-Foutou et Zaffran donnent une réponse affirmative à la première question. Leur méthode consiste à montrer que les variétés LVMB admettent dans certains cas particuliers une fibration sur des variétés toriques complètes. Cette fibration est appelée fibration de Calabi-Eckmann généralisée. Pour cela, ils montrent que si les vecteurs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vérifient la condition (K), à savoir que leurs coordonnées sont toutes rationnelles (ou plus généralement que leur image par un automorphisme affine *réel* de $\mathbb{C}^m$ ont toutes leurs coordonnées rationnelles), alors l'action $(*)$ de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^m$ sur $\mathcal{S}$ décrite précédemment peut être vue comme la restriction d'une action algébrique de $(\mathbb{C}^*)^{2m+1}$ sur $\mathcal{S}$. En utilisant des arguments de Geometric Invariant Theory de Mumford, ils montrent que le quotient de cette action algébrique est une variété torique complète. Cette variété est projective dans le cas d'une variété LVM, alors que ce n'est pas nécessairement le cas pour une variété LVMB quelconque.

Mes travaux visent à étudier en détails la topologie des variétés LVMB. La piste explorée est d'utiliser les propriétés combinatoires des variétés LVMB et toriques. En effet, de nombreuses propriétés d'une variété LVMB $\mathcal{N}$, telles que certains de ses invariants topologiques fins (anneaux de cohomologie par exemple), peuvent être déterminées par celles d'un complexe simplicial $\mathcal{P}$ naturellement associé à $\mathcal{N}$. Dans [2] (cf. section 3.Publications), je montre que ce *complexe associé* est la généralisation du polytope associé à une variété LVM, notion déjà présente dans [M] ou [BM]. J'ai montré également dans [2] que ce complexe est une sphère simpliciale rationnellement étoilée (i.e. le complexe simplicial sous-jacent d'un éventail simplicial complet). Ces sphères apparaissent dans l'étude des variétés toriques et le lien entre variétés LVMB et variétés toriques est renforcé dans [2]. J'ai aussi démontré dans le même article que toute telle sphère apparaissait comme complexe associé d'une variété LVMB. Parallèlement, j'ai établi que l'espace des orbites de $\mathcal{S}$ pour l'action $(*)$ restreinte à $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}^m$ est un complexe moment-angle, objet étudié notamment par Davis, Januszkiewicz, Buchstaber et Panov (cf. [BP] pour une présentation complète de ces complexes). Les complexes moment-angle ont une nature très combinatoire (ils sont construit à partir de complexes simpliciaux) et jouent en topologie un rôle similaire de vaste famille d'exemples que celui joué par les variétés toriques en géométrie algébriques. Jusqu'à récemment, peu de chose étaient connues sur la structure de variété (lisse ou complexe) des complexes moment-angle. L'étude de l'article [2] implique que les complexes moment-angles paramétrés par des sphères simpliciales rationnellement étoilées peuvent être munies d'une structure de variété LVMB.

Dernièrement, j'ai utilisé les résultats précédents pour étudier la topologie de certaines variétés LVMB. Notamment, j'ai étudié des variétés LVMB associées à des sphères simpliciales non polytopales. Mon choix s'est porté sur les exemples les plus simples (en termes de dimension et de nombre de sommets) de sphères non polytopales, à savoir les sphères de Brückner et de Barnette, qui sont de dimension 3 et ont 8 sommets. Pour cela, j'ai construit une réalisation rationnellement étoilée de ces sphères et j'ai dû développé des algorithmes de calculs (en utilisant le logiciel Maple) permettant d'effectuer des calculs d'homologie et de cohomologie à coefficients entiers ou réels. Les résultats des calculs sont présentés dans ma thèse [1]. En particulier, les variétés LVMB associées à ces deux sphères ont les mêmes anneaux de cohomologie que certaines variétés LVM.

7 Programme de recherche

Dans ma thèse, j'ai approfondi l'étude des variétés LVMB et renforcé les liens qu'entretiennent ces variétés complexes avec des objets importants dans d'autres disciplines : variétés toriques, triangulations de sphères, complexes moment-angles,.... Il y a plusieurs possibilités pour continuer l'investigation menée dans cette thèse.

La première piste consisterait à tenter de répondre à la question 2 de la section précédente. Si la réponse est affirmative, un exemple concret sera obtenu à partir d'une sphère rationnellement étoilée non polytopale. Les exemples les plus simples d'une telle sphère sont la sphère de Brückner et celle de Barnette, mais, même pour ces cas simples, les calculs effectués durant ma thèse montre que la comparaison des topologies n'est pas facile. Il y a théoriquement beaucoup d'autres exemples de sphères non polytopales. Notons $c(n,d)$ (resp. $s(n,d)$) le nombre de types combinatoires de polytopes de dimension d à n sommets (resp. le nombre de $(d-1)$-sphères simpliciales à n sommets). On a alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c(d,n)}{s(d,n)} = 0 \quad \forall\ d \geq 5$$

et

$$\lim_{d\to\infty} \frac{c(d,d+b)}{s(d,d+b)} = 0 \quad \forall\ b \geq 4$$

Cela signifie que, quitte à augmenter la dimension (et donc la difficulté des calculs), nous avons théoriquement beaucoup d'exemples pour tester notre conjecture ("il existe une variété LVMB n'ayant pas la même topologie que les variétés LVM"). Par exemple, parmi les 1296 sphères de dimension 3 à 9 sommets, 154 sont non polytopales. Cependant, la description explicite de sphères simpliciales n'est connue que pour les petites dimensions et un très petit nombre de sommets (les 3-variétés à 10 sommets n'ont été classifiées par Lutz qu'en 2008). De plus, nous ne connaissons pas d'estimation du nombre de sphères rationnellement étoilées.

Une seconde idée serait d'étudier d'autres invariants des complexes moment-angle. En particulier, il serait intéressant d'exprimer les carrés de Steenrod d'un complexe moment-angle à partir de la combinatoire du complexe simplicial qui le décrit. Cela pourrait notamment permettre de répondre à la question 2. En effet, étudier les complexes moment-angles associés aux sphères de Brückner et Barnette revient à étudier des variétés lisses de dimension 12 fortement connexes. Or ces variétés ont été classifiées par Wall et Ishimoto, et les carrés de Steenrod interviennent de manière prépondérante dans la classification d'Ishimoto.

Une troisième idée de développement que j'aimerais suivre serait d'utiliser certaines techniques combinatoires pour étudier les propriétés des variétés LVMB. Une piste prometteuse dans cette démarche serait de chercher à caractériser topologiquement les variétés LVMB qui proviennent d'une sphère PL, i.e. un complexe simplicial admettant une subdivision combinatoirement équivalente à une subdivision de la frontière d'un simplexe (cf. [BP]). De telles sphères sont obtenues à partir d'opérations simples appelées mouvements bistellaires. Au niveau des complexes moment-angle, ces mouvements bistellaires correspondent à des chirurgies. Mieux comprendre ces mouvements permettraient de construire de nouveaux exemples explicites de variétés LVMB. L'effet des mouvements bistellaires sur les complexes moment-angles a déjà été partiellement étudiée dans [BP] ainsi que dans [LdMG].

Cette troisième idée pourrait aussi permettre de construire des structures lisses ou complexes sur des complexes moment-angle paramétrés par des complexes simpliciaux plus généraux que les sphères rationnellement étoilées. Par exemple, de nombreuses sphères non étoilés peuvent être obtenue comme somme connexe de deux sphères étoilées (voir. [ES] pour de tels exemples). Ce type de sphères non étoilées représente le terrain idéal pour essayer d'élargir la famille des complexes moment-angle admettant une structure complexe ; ou pour trouver une obstruction à une telle construction. Récemment, Matsumura et Moore ont montré dans [MM] qu'une condition nécessaire qu'un complexe simplicial doit satisfaire pour que le complexe moment-angle qui lui est associé ait une structure lisse, à savoir être Gorenstein*, est aussi satisfaite par la somme connexe de deux complexes Gorenstein*.

Cela donnerait des pistes pour répondre à une question ouverte fondamentale concernant la géométrie des complexes moment-angle :

Question 3 : Décrire la classe de complexes simpliciaux K pour lesquelles le complexe $\mathcal{Z}_K$ peut être muni d'une structure différentiable. Même question pour la structure complexe.

Cette question est de grande importance en topologie torique, en témoigne la littérature féconde sur le sujet ses dernières années. On citera par [PU], [L], [I] ou bien [PS].

Enfin, dans les différents chapitres de ma thèse, ainsi que dans bon nombre d'articles précités sur les variétés LVMB, la combinatoire des complexes simpliciaux a été utilisée pour établir des propriétés des variétés LVMB. Une dernière piste de développement serait d'opérer la démarche inverse : utiliser les propriétés des variétés LVMB pour en dériver des résultats combinatoires à propos des complexes simpliciaux ou sur les triangulations de sphères. Un premier (et très modeste) pas dans ce sens a consisté à montrer dans [1] que le joint de deux sphères rationnellement étoilées est encore rationnellement étoilé. Cette démarche, de la géométrie vers la combinatoire, a été utilisée dans le passé avec succès par Stanley dans une preuve du g-théorème pour les polytopes utilisant la théorie de Morse. Plus récemment, Battaglia et Zaffran utilisèrent dans [BZ] le lien entre variétés LVMB et sphères étoilées et un argument du type Mayer-Vietoris pour redémontrer le g-théorème pour une grande famille de sphères appelées sphères *shellable*. Une preuve pour une plus grande classe de sphère semble accessible via la fibration de Calabi-Eckmann et les suites spectrales.

Références

[B] F. Bosio. Variétés complexes compactes : une généralisation de la construction de Meersseman et López de Medrano-Verjovsky. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(5) :1259–1297, 2001.

[BM] F. Bosio and L. Meersseman. Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes. *Acta Math.*, 197(1) :53–127, 2006.

[BP] V.M. Buchstaber and T.E. Panov. *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, volume 24 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[BZ] F. Battaglia and D. Zaffran. Foliations modelling nonrational simplicial toric varieties. arXiv :1108.1637v1, 2011.

[CFZ] S. Cupit-Foutou and D. Zaffran. Non-Kähler manifolds and GIT-quotients. *Math. Z.*, 257(4) :783–797, 2007.

[ES] G. Ewald and C. Schulz. Nonstarshaped spheres. 59(4) :412–416, 1992.

[I] H. Ishida. Invariant stably complex structures on topological toric manifolds. arXiv :1102.4673v1, 2011.

[L] Yu Li. On transition functions of topological toric manifolds. arXiv :1110.4527v2, 2011.

[LdM] S. López de Medrano. Topology of the intersection of quadrics in $\mathbf{R}^n$. In *Algebraic topology (Arcata, CA, 1986)*, volume 1370 of *Lecture Notes in Math.*, pages 280–292. Springer, Berlin, 1989.

[LdMG] S. Lopez de Medrano and S. Gitler. Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums. arXiv :0901.2580v2.

[M] L. Meersseman. A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension. *Math. Ann.*, 317(1) :79–115, 2000.

[MM] M. Matsumura and F. Moore. Connected sums of simplicial complexes and equivariant cohomology. arXiv :1112.0157v2.

[PS] M. Poddar and S. Sarkar. A class of torus manifolds with nonconvex orbit space. arXiv :1109.0798v2, 2011.

[PU] T. Panov and Y. Ustinovsky. Complex-analytic structures on moment-angle manifolds. arXiv :1008.4764v1.